Sztuczne sieci neuronowe

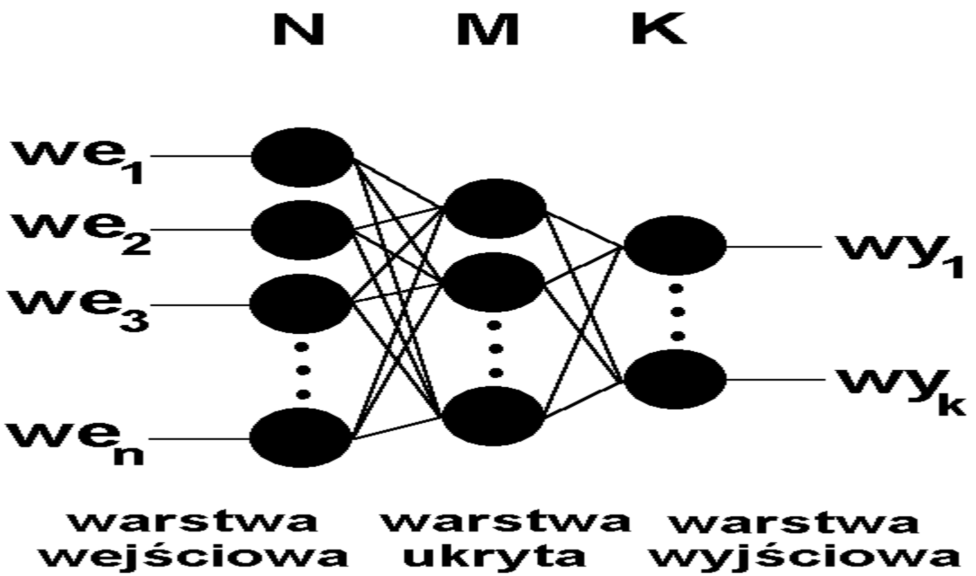
Krzysztof A. Cyran
POLITECHNIKA ŚLĄSKA
Instytut Informatyki, p. 311

Wykład 2

PLAN:

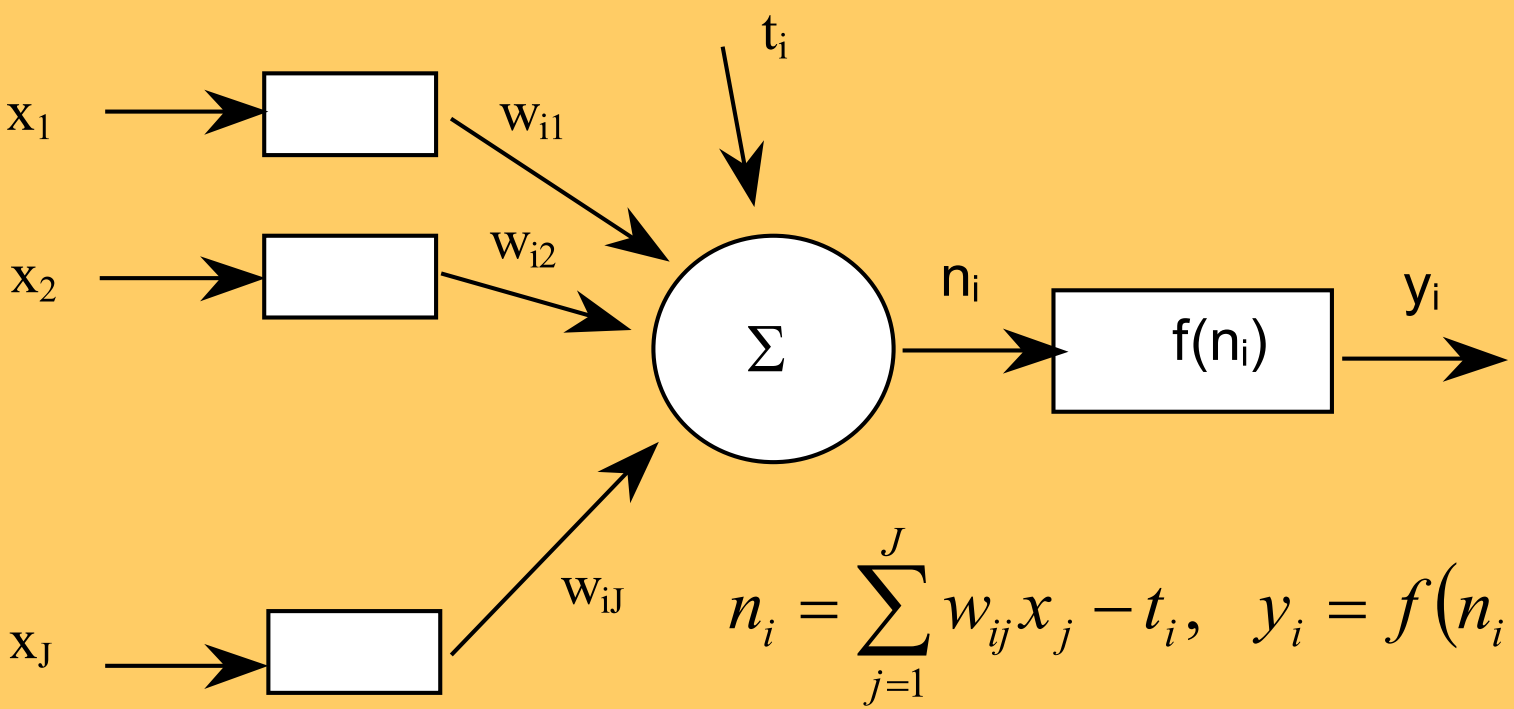
- Repetitio (brevis)
- Perceptron Rosenblatta
- Sieci neuronowe i problem separowalności liniowej

Sieć neuronowa warstwowa



Sieć neuronowa
z jedną warstwą
ukrytą

Działanie sztucznego neuronu



$$n_i = \sum_{j=1}^{J} w_{ij} x_j - t_i, \quad y_i = f\left(n_i\right)$$

t_i – próg aktywacji neuronu

Działanie neuronu (cd.)

Równania :

$$n_i = \sum_{j=1}^{J} w_{ij} x_j - t_i,$$

$$y_i = f\left(n_i\right)$$

dla uproszczenia zapisu przedstawiamy jako :

$$y_i = f\left(\sum_{j=0}^{J} w_{ij} x_j\right)$$

$$gdzie: \quad w_{i0} = -t_i, \quad x_0 = 1$$

Działanie neuronu (cd.)

Równania :

$$n_i = \sum_{j=1}^{J} w_{ij} x_j - t_i,$$

$$y_i = f\left(n_i\right)$$

lub jako :

$$y_i = f\left(n_i\right)$$

$$n_i = \sum_{j=0}^{J} w_{ij} x_j$$

$$gdzie: \quad w_{i0} = -t_i, \quad x_0 = 1$$

Działanie neuronu (cd.)

Przedstawmy wektory $\mathbf{w}_i$ oraz $\mathbf{x}$ jako :

$$\mathbf{x} = [1, x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_J], \quad \mathbf{w}_i = [w_{i0}, w_{i1}, \ldots, w_{ij}, \ldots, w_{iJ}]$$

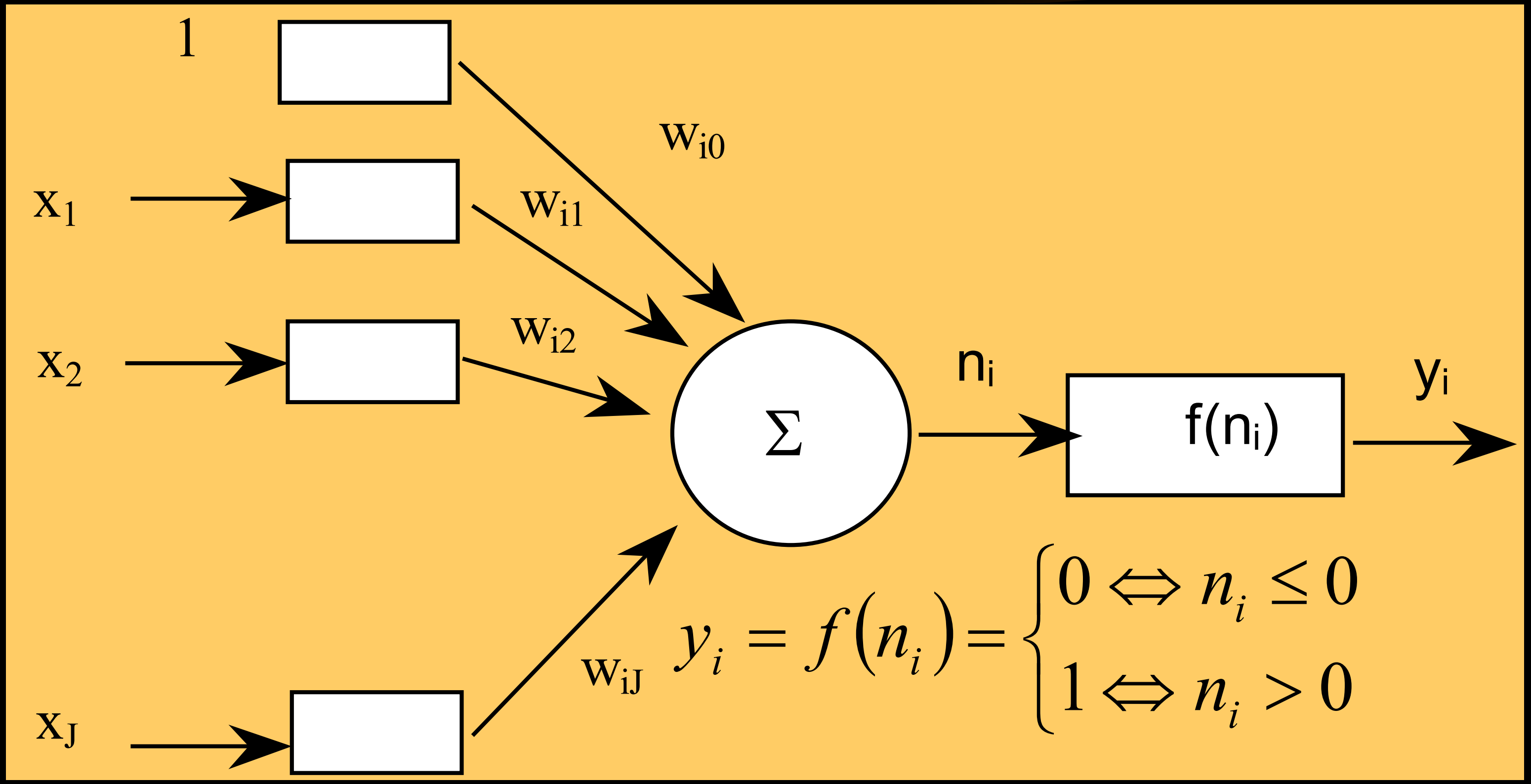
Wówczas :

$$n_i = \mathbf{w}_i * \mathbf{x}$$

lub :

$$n_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$$

Perceptron Rosenblatta



Separowalność liniowa

- Definicja:

Problem jest *separowalny liniowo* jeżeli da się go przedstawić jako podział dychotomiczny za pomocą pewnej hiperpłaszczyzny

Perceptron Rosenblatta a separowalność liniowa

- Perceptron Rosenblatta dokonuje podziału dychotomicznego przestrzeni wejściowej $L \subset \Re^J$, $\mathbf{x} \in L$

- W zadaniach rozpoznawania Perceptron Rosenblatta dzieli przestrzeń wejściową L na część należącą do pewnej klasy abstrakcji (obiekt rozpoznany) gdy $y_i = 1$ oraz część do niej nie należącą gdy $y_i = 0$.

Perceptron Rosenblatta a separowalność liniowa (cd.)

- Granica podziału wyznaczona jest poprzez hiperpłaszczyznę określoną w przestrzeni *L* równaniem:

$$\sum_{j=0}^{J} w_{ij} x_j = 0, \qquad x_0 = 1, w_{i0} = -t_i$$

Wniosek: PR nadaje się do rozwiązywania problemów separowalnych liniowo

Przypadek 2D

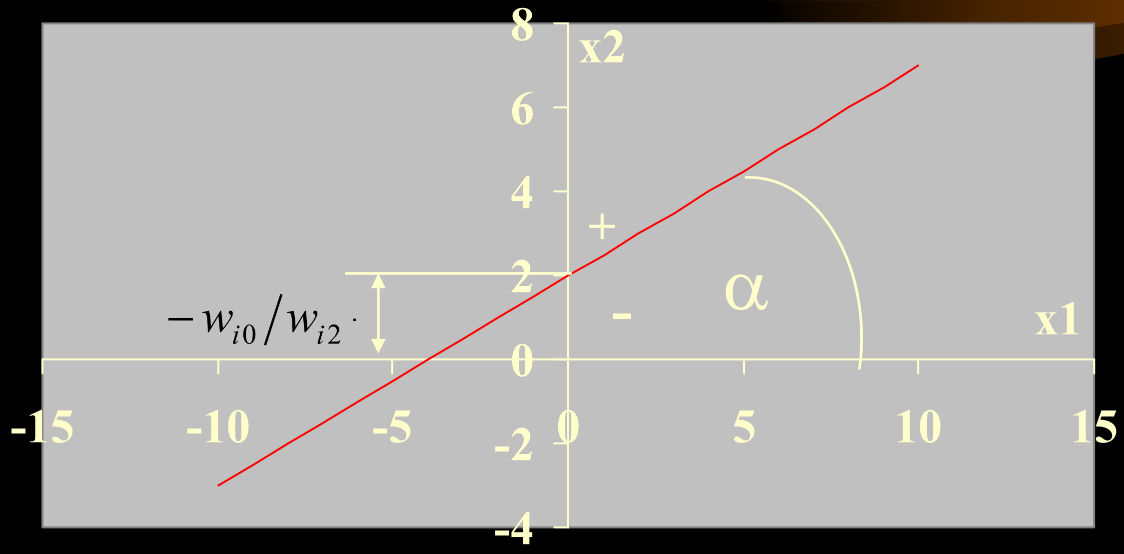
- Dla wymiaru przestrzeni wejściowej J=2 hiperpłaszczyzną tą jest prosta o równaniu:

$$w_{i0} + w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 = 0$$

- Jeżeli $w_{i2} \neq 0$, wówczas:

$$x_2 = -\frac{w_{i0}}{w_{i2}} - \frac{w_{i1}}{w_{i2}} x_1$$

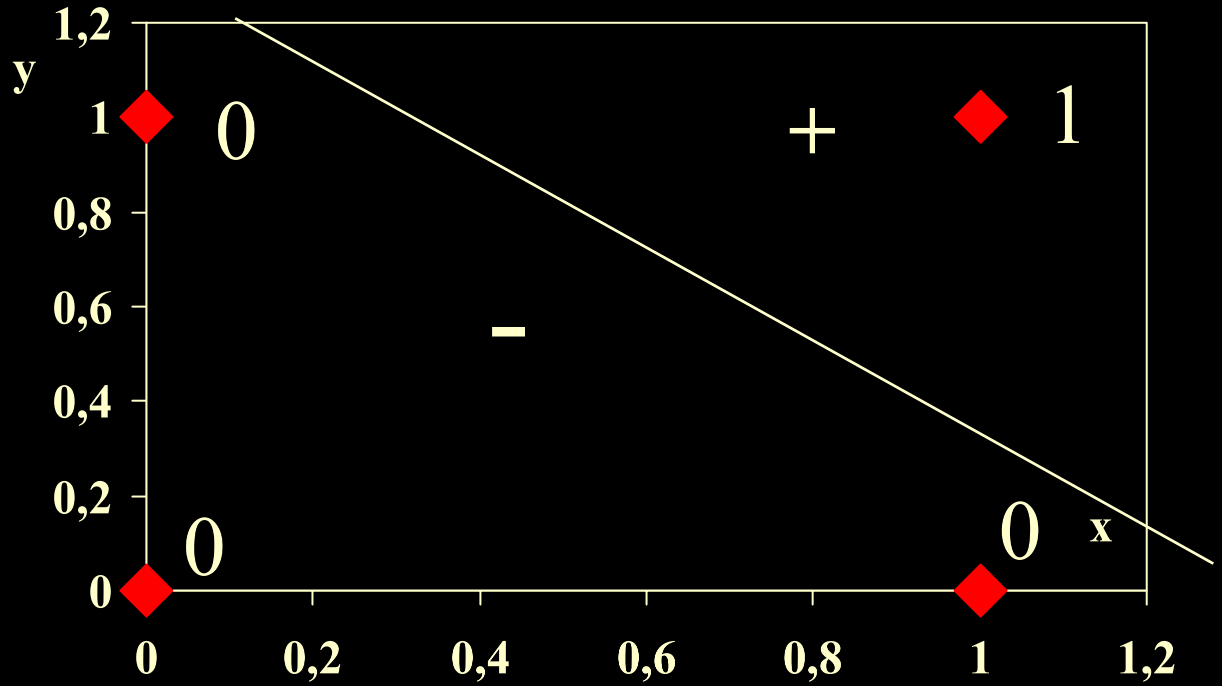
Przypadek 2D (cd.)



$$x_2 = -\frac{w_{i0}}{w_{i2}} - \frac{w_{i1}}{w_{i2}} x_1 \qquad tg\,\alpha = -\frac{w_{i1}}{w_{i2}}$$

Perceptron Rosenblatta a separowalność liniowa (AND)

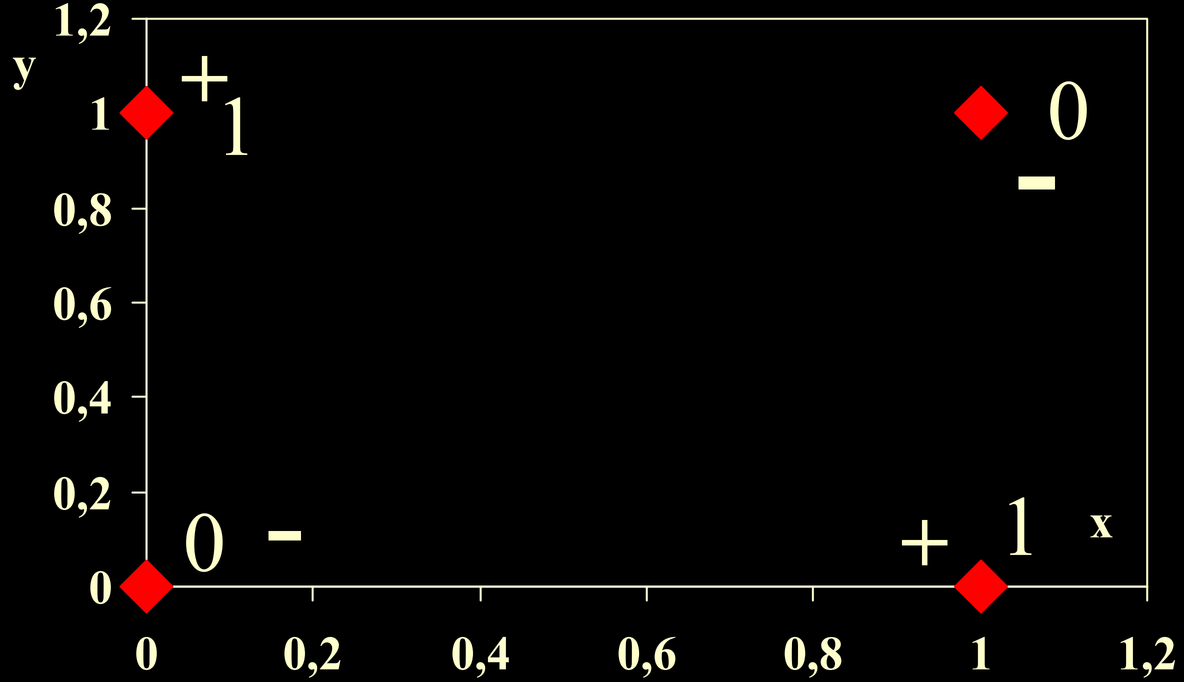
F = x AND y



Wniosek: jest to funkcja separowalna liniowo

Perceptron Rosenblatta a separowalność liniowa (XOR)

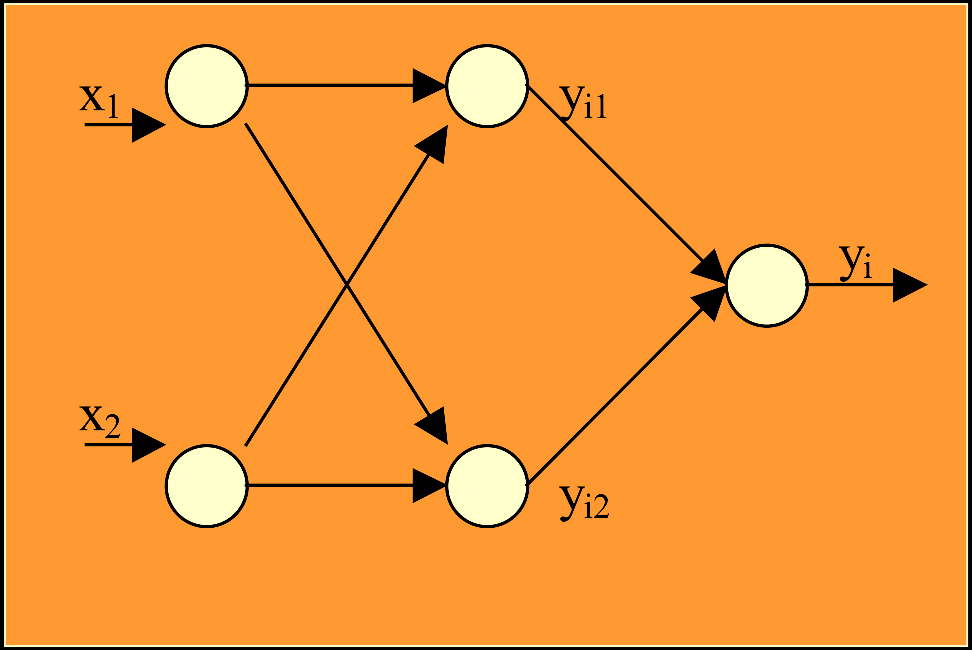
F = x XOR y



Wniosek: nie jest to funkcja separowalna liniowo

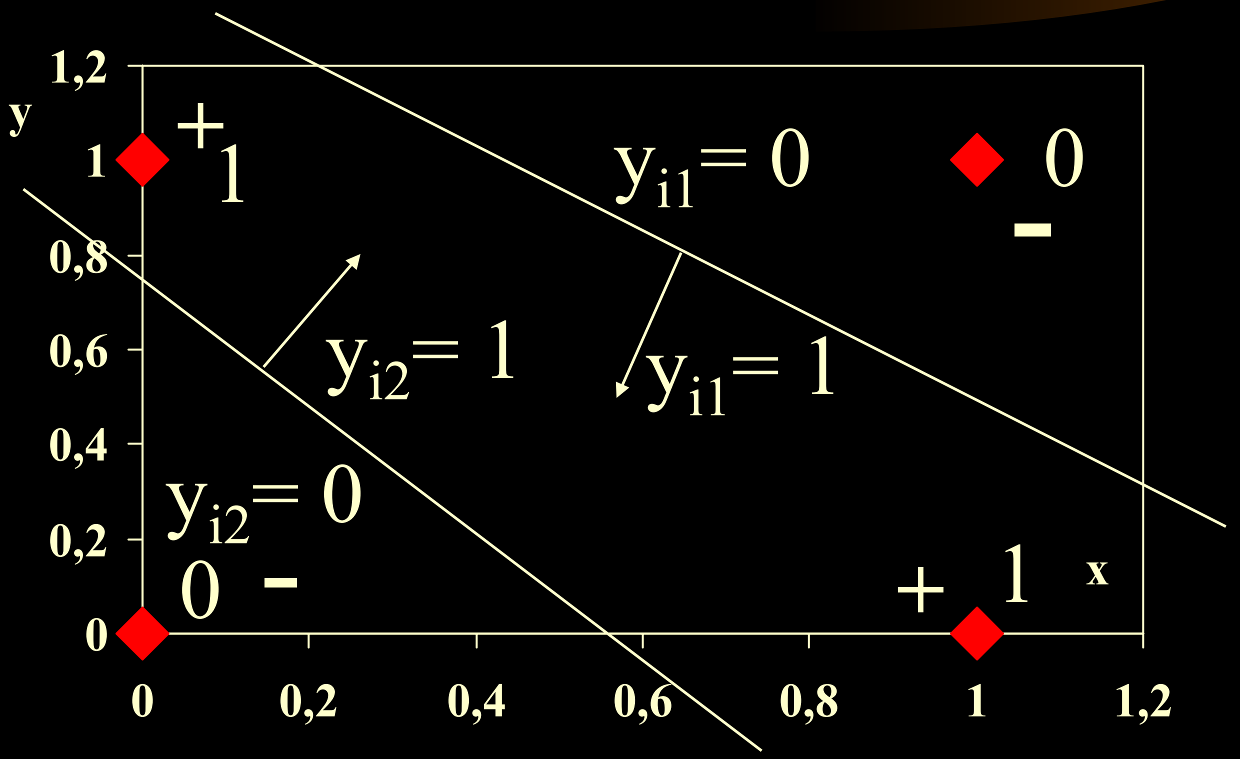
Sieć z warstwą ukrytą

Wprowadzenie dodatkowej warstwy elementów perceptronowych zwiększa zakres stosowalności nieliniowej sieci

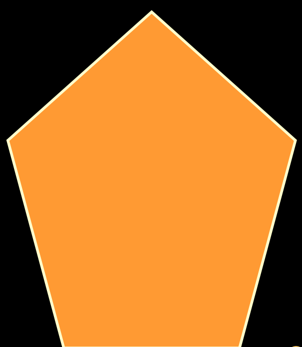


Sieć perceptronów z warstwą ukrytą rozwiązuje problem (XOR)

$F = x \text{ XOR } y$ $\quad\quad$ $F = y_{i1} \text{ AND } y_{i2}$

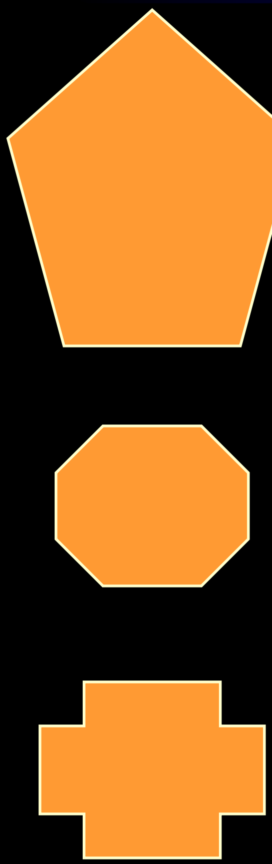


Typy zadań realizowalnych przez sieć z jedną warstwą ukrytą



- Sieć dwuwarstwowa (z jedną warstwą ukrytą) może dokonywać w przestrzeni wejściowej klasyfikacji dowolnych obszarów jednospójnych, wypukłych (tzn. takich, które powstają przez wydzielenie dowolną liczbą hiperpłaszczyzn)
- Obszary takie nazywamy SIMPLEKSAMI
- Każdej hiperpłaszczyźnie tworzącej simpleks odpowiada jeden neuron ukryty
- (W ogólności) sieć taka nie potrafi dokonywać klasyfikacji obszarów niejednospójnych ani wklęsłych

Typy zadań realizowalnych przez sieć z dwoma warstwami ukrytymi



- Sieć trójwarstwowa (z dwoma warstwami ukrytymi) może dokonywać w przestrzeni wejściowej klasyfikacji dowolnych obszarów, gdyż dowolny obszar da się przedstawić jako sumę lub różnicę pewnych simpleksów klasyfikowanych w drugiej warstwie ukrytej
- Każdemu simpleksowi odpowiada jeden neuron w drugiej warstwie ukrytej
- Neuron warstwy wyjściowej dokonuje wycięcia jednego wierzchołka hipersześcianu o wymiarze równym ilości simpleksów, a to jest zawsze problemem separowalnym liniowo

Wniosek ogólny

- Sieć nieliniowa trójwarstwowa (z dwoma warstwami ukrytymi) może realizować dowolnie złożoną klasyfikację przestrzeni wejściowej w zbiór klas abstrakcji
- Aby to mogła zrobić musi istnieć metoda odpowiedniego ustawiania hiperpłaszczyzn, poprzez modyfikacje współczynników wagowych – jest to uczenie sieci

Metoda wstecznej propagacji błędów (back propagation)

- Stosuje się ją do perceptronów wielowarstwowych
- Funkcja aktywacji: sigmoidalna

$$O_i = \frac{1}{1+e^{-\beta n_i}}$$

- lub tangens hiperboliczny

$$O_i = tgh\left(\frac{\alpha n_i}{2}\right) = \frac{1-e^{-\alpha n_i}}{1+e^{-\alpha n_i}}$$

Własności funkcji sigmoidalnej

- Ciągła, niemalejąca, nieliniowa,
- Różniczkowalna:

$$\frac{\partial O_i^{(l)}}{\partial n_i^{(l)}} = \beta O_i^{(l)}(1 - O_i^{(l)})$$

- Dowolnie blisko aproksymuje funkcję progową $\mathbf{1}(n_i)$:

$$\lim_{\beta \to \infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-\beta n_i}} \right) = \mathbf{1}(n_i)$$

Własności funkcji tangensa hiperbolicznego

- Ciągła
- Niemalejąca
- Nieliniowa
- Różniczkowalna:
- Dowolnie blisko aproksymuje funkcję sgn(n_i):

$$\lim_{\alpha \to \infty} tgh\left(\frac{\alpha n_i}{2}\right) = \operatorname{sgn}(n_i)$$