Parysz Żaneta
Strzoda Edyta

1. Przetwarzanie sygnałów cyfrowych

Przetwarzanie sygnałów cyfrowych (*Digital Signal Processing, DSP*) jest dziedziną nauki i techniki która zajmuje się sygnałami w postaci cyfrowej, jak również metodami przetwarzania tych sygnałów. W dzisiejszych czasach DSP ma ogromne znaczenie w dziedzinie techniki. Cyfrowe przetwarzanie sygnałów znalazło zastosowanie w telekomunikacji, elektronice, sejsmologii, a nawet medycynie (tomografia komputerowa, rezonans magnetyczny). Wykorzystuje się urządzenia przetwarzające dźwięk, obrazy, mowę, dane alfanumeryczne; DSP stosuje się również w sieciach telekomunikacyjnych, które przenoszą i komutują te sygnały oraz systemach urządzeń zapewniających dostarczaniem różnorakich usług.

Jako przykłady wykorzystywania można wymienić modemy telefoniczne, systemy cyfrowego szerokopasmowego dostępu abonenckiego DSL, dostępu radiowego, sprzęt Hi-Fi (equalizacja dźwięku), wzmacniacze i gitary elektryczne, telefonię komórkową i satelitarną oraz kryptografię.

Do zadań cyfrowego przetwarzania sygnałów należy zamiana sygnału z postaci analogowej na cyfrową za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego.

Przetwarzanie sygnałów cyfrowych jest z reguły realizowane przez wyspecjalizowane do tego urządzenia komputerowe, korzystające z procesorów sygnałowych. Pozwalają one na przetwarzanie sygnałów w czasie rzeczywistym *(ang. real time signal processing).*
Procesory sygnałowe charakteryzują się rozdzielonymi pamięciami programu i danych, możliwością równoczesnego odczytu instrukcji i danych, sprzętowym dostosowaniem do wykonywania operacji najczęściej występujących przy przetwarzaniu sygnałów oraz potokowym przetwarzaniem instrukcji.

Pierwszy układ został wyprodukowany w roku 1979, zawierał procesor, pamięć EPROM i RAM oraz przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe w pojedynczym chipie.
W późniejszych latach znaczącym układem był TMS32010 (1982 r.) produkcji Texas Instruments.
Do najbardziej popularnych mikrokontrolerów należą układy takich firm jak Atmel, Intel, Freescale Semiconductor (dawniej Motorola), Infineon, Analog Devices (m.in.: ADSP-21061 SHARC), Philips, ST, Hitachi i wielu innych. Bardzo popularne są również mikrokontrolery AVR firmy Atmel oraz dsPIC firmy Microchip Technology.

W przetwarzaniu sygnałów cyfrowych można analizować sygnały w różnych dziedzinach, i tak: sygnały jednowymiarowe analizowane są w dziedzinie czasu, sygnały wielowymiarowe w dziedzinie przestrzeni, można również analizować sygnały w dziedzinie częstotliwości.

W przypadku przekształcania dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości korzysta się z transformaty Fouriera. W wyniku tego przekształcenia możemy dowiedzieć się informacji o fazie i amplitudzie poszczególnych składowych częstotliwościowych.

W przypadku dziedziny czasu i przestrzeni, operacją najczęściej wykorzystywaną jest obróbka sygnału wejściowego, mająca na celu poprawienia jego własności. Proces, w którym się to odbywa nazywamy filtracją.

Filtracja polega na wykonaniu operacji na zbiorze próbek wejściowych sąsiadujących z bieżącą próbką, a niekiedy z wykorzystaniem również pewnej ilości poprzednich próbek sygnału wyjściowego. Filtry posiadają pamięć wewnętrzną, w której zapisywany jest stan, dzięki któremu odpowiedź na każdą kolejną próbkę, nie zależy wyłącznie od tej próbki, ale również od innych próbek.

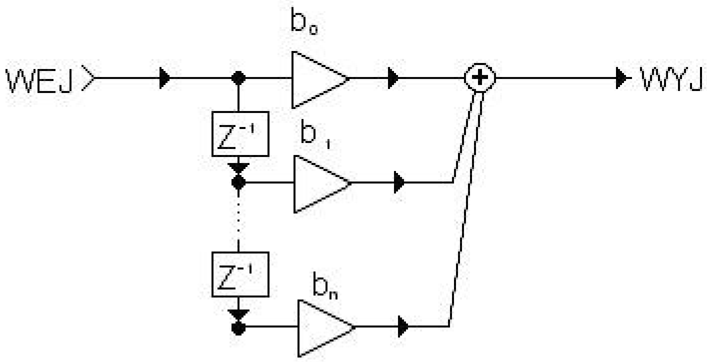
Filtry można scharakteryzować w następujący sposób:

- Filtry liniowe i nieliniowe;
- Filtry przyczynowe i nieprzyczynowe;
- Filtry niezmienne w czasie;
- Filtry o skończonej i nieskończonej odpowiedzi impulsowej;

2. Filtry o skończonej i nieskończonej odpowiedzi impulsowej

Filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (FIR)

Filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (*Finite Impulse Response filter*) zaliczany jest do filtrów cyfrowych nierekursywnych. W filtrach tego typu nie występuje pętla sprzężenia zwrotnego, gdyż musi być spełniony warunek, iż reakcja na wyjściu układu na pobudzenie o skończonej długości jest również skończona. Długość pobudzenia jest traktowana jako długość odcinka czasu, dla którego próbki sygnału przyjmują wartości różne od zera.



gdzie:
b_i - współczynniki filtra;
z^{-1} - opóźnienia o jedną próbkę;

Funkcja przejścia filtru jest wielomianem opisanym za pomocą współczynników filtru:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_N z^{-1} = \frac{B(z)}{z^{-N}}$$

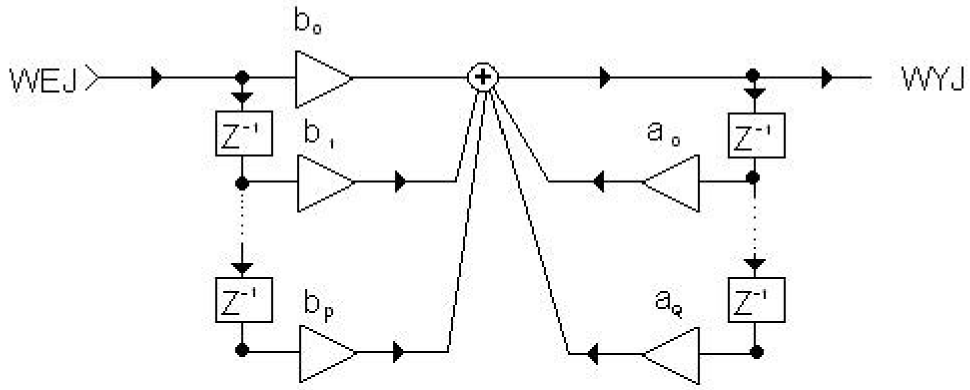
Odpowiedź impulsowa filtru FIR jest tożsama z ciągiem współczynników $\{b_i\}$.
Do realizacji skomplikowanych funkcji przejścia wymagany jest wielomian wysokiego rzędu, dlatego by uzyskać podobną charakterystykę do filtrów IIR potrzeba więcej zasobów sprzętowych, przez co realizacja jest bardziej złożona obliczeniowo.

Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej posiadają wiele zalet. Można tu wymienić fakt, iż projektowanie filtrów FIR jest znacznie łatwiejsze od IIR; filtry FIR są zawsze stabilne, na co ma wpływ występowanie tylko zer w ich funkcji przejścia; nie występuje rekursywność, która powoduje niestabilność; implementacja filtrów FIR może być łatwo zrównoleglona, a niektóre procesory wręcz wspomagają operacji sumy iloczynów, pozwalając obliczać wynik filtracji w znikomej liczbie cykli zegara; łatwo w nich uzyskać liniową fazę, co powoduje opóźnienie składowych sygnału w takim samym stopniu.

Do nielicznych wad filtrów FIR zaliczamy dużą złożoność obliczeniową (jednak współczesne implementacje filtrów FIR wykorzystują realizacje polifazowe oraz transformacje ortogonalne, co powoduje zmniejszanie złożoności, przybliżając ją w ten sposób do złożoności filtrów IIR) oraz zwiększone zapotrzebowanie na pamięć operacyjną.

Filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej

Filtr IIR (*Infinite Impulse Response*) czyli filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej należy do filtrów cyfrowych rekursywnych. W przypadku filtru IIR, reakcja na pobudzenie o skończonym czasie trwania jest teoretycznie nieskończenie długa, co jest spowodowane występowaniem pętli sprzężenia zwrotnego.



gdzie:
z^{-1} - opóźnienie sygnału o jedną próbkę;
a_i, b_i - współczynniki filtra.

Funkcja przejścia filtru IIR wygląda następująco:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_P z^{-P})}{1 - (a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_Q z^{-Q})}$$

Zera funkcji przejścia determinowane są przez miejsca zerowe wielomianu licznika, natomiast miejsca zerowe wielomianu mianownika określają bieguny funkcji.

Do zalet filtrów IIR zaliczamy niską złożoność obliczeniową oraz niewielkie zapotrzebowanie na pamięć operacyjną. Możliwości w kształtowaniu przebiegu funkcji za pomocą ilorazów wielomianu powoduje, iż łatwiej możemy uzyskać pożądana charakterystykę używając tych filtrów.
Jednakże IIR posiadają więcej wad niż filtry FIR, zaliczamy tutaj zagrożenie utraty stabilności (miejsca zerowe wielomianu w mianowniku znajdą się poza okręgiem jednostkowym); większą wrażliwość na błędy zaokrągleń (zaokrąglenia wartości współczynników mogą znacząco zmienić charakterystykę, zaokrąglenia wartości sygnału i wyników pośrednich wprowadzają szum, który może się akumulować); samo projektowanie filtrów jest trudniejsze od filtrów FIR oraz brak implementacji jako filtrów o liniowej fazie.

Z powodu większej ilości zalet niż wad oraz rosnącą wydajność układów cyfrowych i procesorów sygnałowych, filtry FIR są obecnie częściej stosowane od filtrów IIR.

3. Dyskretna transformata Fouriera - algorytmy

Dyskretna transformata Fouriera (***DFT*** *z ang.* ***d****iscrete* ***F****ourier* ***t****ransformation*) jest transformatą Fouriera wyznaczoną dla sygnału próbkowanego, a więc dyskretnego.

Dyskretna transformata Fouriera przekształca skończony ciąg próbek sygnału
$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}),\ a_i \in \mathbb{R}$

w ciąg harmonicznych $(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{N-1}),\ A_i \in \mathbb{C}$ zgodnie ze wzorem:

$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k w_N^{-kn},\ 0 \le n \le N-1$$

gdzie:

$$w_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

i– jednostka urojona
n - numer harmonicznej
k - numer próbki sygnału
a_k - wartość próbki sygnału
N - liczba próbek.

Algorytmy:

Jednym z podstawowych i jednocześnie najbardziej powszechnych algorytmów cyfrowego przetwarzania sygnałów jest właśnie dyskretna transformata Fouriera.
Algorytm ten umożliwia , stosunkowo niewielkim nakładzie obliczeniowym, badanie w dziedzinie częstotliwości właściwości sygnałów w określonych w funkcji czasu. Mówimy, że umożliwia on przeprowadzenie tzw. analizy częstotliwościowej lub inaczej analizy widmowej.

Szybka transformata Fouriera (ang.**FFT** od **F**ast **F**ourier **T**ransformation) to algorytm liczenia dyskretnej transformaty Fouriera.

Niech x_0, ..., x_{N-1} będą liczbami zespolonymi, wtedy DFT jest określona wzorem

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk} \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

Obliczanie tych sum za pomocą powyższego wzoru zajęłoby O(N^2) operacji.

Algorytmy (jak algorytm Cooleya-Tukeya) obliczające szybką transformatę Fouriera bazują na metodzie 'dziel i zwyciężaj' rekurencyjnie dzieląc transformatę wielkości $N = N_1N_2$ na transformaty wielkości N_1 and N_2 z wykorzystaniem O(N) operacji mnożenia.

Najpopularniejszą wersją FFT jest *FFT o podstawie 2*. Jest to bardzo efektywna operacja, jednak wektor próbek wejściowych (spróbkowany sygnał) musi mieć długość $N = 2^k$, gdzie *k* to pewna liczba naturalna. Wynik otrzymuje się na drodze schematycznych przekształceń, opartych o tak zwane *struktury* motylkowe.

Złożoność obliczeniowa **Szybkiej transformaty Fouriera** wynosi $O(n\log n)$, zamiast $O(n^2)$ naiwnego algorytmu. Dzięki istnieniu takiego algorytmu praktyczne możliwe stało się cyfrowe przetwarzanie sygnałów (DSP), a także zastosowanie dyskretnych transformat cosinusowych (DCT) (JPEG, MP3 itd.) do kompresji.