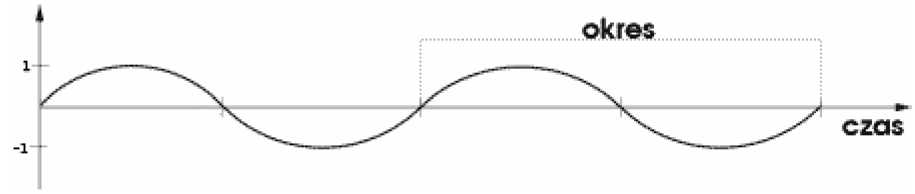
31.01.2008

Zastowowanie transformacji Fouriera w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów

Paweł Tkocz
inf. sem. 5
gr 1

1. Dźwięk cyfrowy

Fala akustyczna jest jednym ze zjawisk fizycznych mających charakter okresowy. Falę tę reprezentują zmiany ciśnienia w powietrzu, które przy odpowiednich częstotliwościach stanowią, słyszalny dla ucha ludzkiego, dźwięk. Poniższy wykres prezentuje fale sinusoidalną. Usłyszymy ją jako jeden monotonny dźwięk, którego wysokość zależy od okresu fali - im będzie on krótszy, tym wyższy będzie usłyszany dźwięk.



Zmiany stanu fali są dla komputera całkowicie abstrakcyjne. W naturze słyszymy dźwięki ciągłe - technika cyfrowa musi jednak opisać ich zmienność w czasie w postaci liczb. Z pomocą przychodzi tutaj **próbkowanie** - tworzenie ciągu wartości chwilowych funkcji pobranych w równych odstępach czasu. Stopniowe, płynne zmiany stanu fali dźwiękowej zachodzące w czasie są opisywane przez komputer w drodze pobierania próbek dźwięku w ściśle ustalonych odstępach czasowych. Jeżeli częstostliwość próbkowania wynosi 1 Hz, to komputer bada stan fali dźwiękowej raz na sekundę. W ten sposób sygnał z urządzenia analogowego przetwarzany jest na postać cyfrową.

2. Transformacja Fouriera

Transformacja Fouriera umożliwia nam przedstawienie sygnału zmiennego w czasie w skali częstotliwości. Każdy sygnał analogowy można przedstawić w postaci składowych sinusoidalnych o odpowiedniej amplitudzie, fazie i częstotliwości. Dyskretna postać transformacji (DTF), jest stosowana przy cyfrowej analizie spektrum sygnału t.j. :

- analiza widma sygnału,
- przetwarzanie mowy,
- rozpoznawanie obrazów.

<u>Dyskretna postać transformacji</u>

Jesli znamy wartosci funkcji okresowej f w N równomiernie rozłozonych na odcinku $[0, a)$ punktach, mozemy wyznaczyc przyblizone współczynniki c_n szeregu Fouriera funkcji f. Majac zatem dane N punktów i wartosci funkcji f $y_k = f(k\frac{a}{N})$,w tych punktach:

$k = 0, 1, \cdots, N - 1$, wyznaczyc mozna N przyblizonych współczynników Fouriera:

$$c_n \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n \frac{k}{N}} \quad \text{dla } n = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} - 1.$$

Def. Dyskretną trasformatą Fouriera (DFT) ciagu $y_0, y_1, \cdots, y_{N-1}$ nazywamy ciag
liczbowy $Y_0, Y_1, \cdots, Y_{N-1}$ dany wzorem:

$$Y_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega_N^{-nk} \quad \text{dla } n = 0, 1, \cdots, N-1, \quad \omega_N = e^{2i\pi\frac{1}{N}}.$$

Piszemy:

$$Y = (Y_0, Y_1, \cdots, Y_{N-1}) = \mathcal{F}_N((y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})).$$

Przybliżone współczynniki Fouriera mają postać:

$$c_n \approx c_n^N = \begin{cases} Y_n, & \text{gdy } 0 \leqslant n < \frac{N}{2} \\ Y_{n+N}, & \text{gdy } -\frac{N}{2} \leqslant n < 0. \end{cases}$$

Transformat$\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$alny jest odwracalnym przekształceniem liniowym. Odwzorowanie odwrotne dane jest wzorem:

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \omega_N^{nk} \quad \text{dla } k = 0, 1, \cdots, N-1, \quad \omega_N = e^{2i\pi\frac{1}{N}}.$$

Ze względu na złożoność obliczeniową algorytmu DFT – $O(N^2)$ jest on rzadko implementowany. Do wyznaczenia dyskretnej transfotmaty(oraz transformaty do niej odwrotnej) używa się algorytmu FFT (Fast Fourier Transformation). Jego złożoność jest o wiele lepsza i wynosi$O(N \log_2 N)$.

Główna idea algorytmu FFT

Dowolny wielomian stopnia n-1, gdzie n jest potegą 2

$p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n+1}$

Da się przedstawić w postaci:

$p(x) = p_{parz}(x^2) + p_{nparz}(x^2)$

gdzie:

$p_{parz}(x) = a_0 + a_2x^1 + a_4x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n/2-1}$
$p_{nparz}(x) = a_1 + a_2x^1 + a_5x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n/2-1}$

Wtedy możemy uprościć problem

- z wyznaczenia wartości wielomianu n-tego stopnia p(x) w punktach $w^0, w^1, \ldots, w^{n-1}$

do:

- wyznaczenia wartości dwóch wielomianów stopnia (n/2) w punktach $(w^0)^2, (w^1)^2, \ldots, (w^{n-1})^2$

Zgodnie z Lematem 3 wartości wielomianów $p_{parz}(x)$ i $p_{nparz}(x)$ są tylko wyznaczanew $n/2$ punktach, które są pierwiastkami $n/2$ stopnia z jedynki. Niech

$k = 0, 1, \ldots , n/2 -1$

$v = e^{-i*2\pi/m}$ gdzie $m = n/2$

v^k jest pierwiastkiem stopnia m z jedności

$e_k = p_{parz}(v^k) = p_{parz}(w^{2k})$ (z Lematu 2)

$d_k = p_{nparz}(v^k) = p_{nparz}(w^{2k})$

Wtedy dla l=k, (czyli dla $l = 0, 1,\ldots, n/2-1$)

$$y_l = p(w^k) = p_{parz}(w^{2k}) + w^k p_{nparz}(w^{2k}) = e_k + w^k d_k$$

Dla dla $l = n/2 + k$, (czyli dla $l = n/2 - 1,\ldots,n-1$)

$$y_l = p(w^{n/2+k}) = p_{parz}(w^{2k}w^n) + w^{n/2+k}p_{nparz}(w^{2k}w^n) = p_{parz}(w^{2k}) - w^k p_{nparz}(w^{2k}) = \\ = e_k - w^k d_k$$

ponieważ:

$w^n = e^{-2\pi i}=1$

$w^{n/2} = -1$ (z Lematu 1)

Łatwo zauważyć, że dla n=1

$l = 0$

$y_0 = w^{0l}a_0 = a_0$

Algorytm FFT

Mając dane $\{a_0, a_1, a_2,\ldots , a_{n-1}\}$ mamy wyznaczyć $\{y_0, y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}\}$
Zakładamy, że n jest potęgą 2

Algorytm:

```
FFT(n, a0, a1, a2, a3, ... , an-1)
{
    if (n == 1) return a0;
        w = e^(-2πi/n);
        (e0, e1, e2, e3,..., en/2-1) = FFT(n/2, a0, a2, a4, a6,..., an-2);
        (d0, d1, d2, d3,..., dn/2-1) = FFT(n/2, a1, a3, a5, a7,..., an-1);
        for k = 0 to n/2-1
        {
            yk = ek + w^k dk;
            yk+n/2 = ek – w^k dk
         };
        return (y1, y2, y3,..., yn-1);
}
```

Dzięki istnieniu takiego algorytmu, możliwe stało się cyfrowe przetwarzanie sygnałów za pomocą procesorów DSP np. usuwanie szumów : Stosując szybką transformatę Fouriera przekształcamy dzwięk do zapisu częstotliwościowego.Usuwamy sygnały o nieporządanych częstotliwościach i stosujemy transformatę odwrotną.

3. Wykorzystanie transformacji Fouriera dla procesorów DSP

Procesory sygnałowe **DSP** (Digital Signal Processors) są niezwykle wydajnymi układami przeznaczonymi do stosowania w rozwiązaniach wymagających dużej mocy obliczeniowej i dużej szybkości działania. Stosowane są przeważnie w systemach czasu rzeczywistego do przetwarzania sygnałów analogowych (np. dźwięku, obrazu, temperatury, ciśnienia itp.) na postać cyfrową oraz obróbce tak otrzymanych wyników. Szczególnym polem zastosowań są aplikacje, w których wykonuje się dużą liczbę działań matematycznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie - w tym operacje zmiennoprzecinkowe), które to wykonywane są w bardzo krótkim czasie. Zalety te zapewnia specjalna architektura układów, kładąca nacisk na łatwy dostęp do pamięci RAM, szybkie przetworniki ADC, wysoką częstotliwość zegara (do 600 MHz), krótki czas wykonywania instrukcji itp.

Przykładowe rodziny procesorów sygnałowych firmy Analog Devices:

- **BlackFin** to nazwa rodziny procesorów stałoprzecinkowych , które łączą cechyprocesorów DSP oraz RISC. Układy te zawierają po dwa 16-bitowe układy MAC, dwa 40-bitowe ALU i cztery 8-bitowe ALU przeznaczone do operacji na danych video. Układy BlackFin dedykowane są do szeroko rozumianych zastosowań w urządzeniach multimedialnych, w tym także wszędzie tam, gdzie wymagane jest przetwarzanie numeryczne dużych ilości danych.

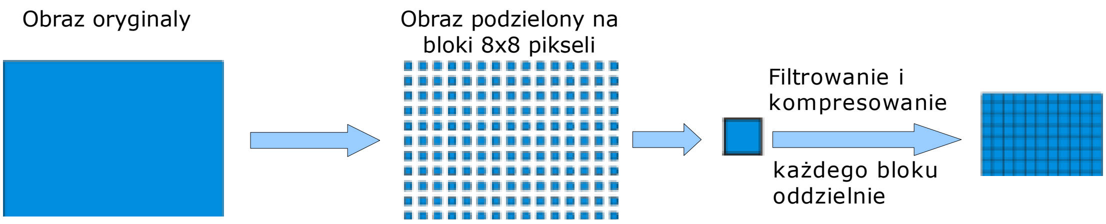
- Procesory DSP z rodziny **SHARC** (Super Harvard Architecture Computer) dzięki unikalnej architekturze pamięci, zbudowanej z dwóch dużych bloków dwubramowej pamięci SRAM, są w stanie sprostać zadaniom wymagającym wykonywania ciągłych szybkich obliczeń (w tym operacji zmiennoprzecinkowych).

Dzięki algorytmowi FFT, procesory DSP zaczęły być używane na szeroką skalę. Wykorzystanie cyfrowego przetwarzanie sygnałow wskazuje na takie obczary jak: cyfrowe przetwarzanie dźwięku, cyfrowe przetwarzanieobrazów oraz przetwarzanie mowy. Algorytmy Cyfrowego przetwarzania sygnałów są niekiedy realizowane przez specjalizowane urządzenia komputerowe, które korzystają ze specjalizowanych procesorów DSP, pozwalających na przetwarzanie sygnałów w czasie rzeczywistym *(ang. real time signal processing)*. Stosowanie analizy Fouriera, ma miejsce w większości przypadkow korzystania z danych multimedialnych:

- kompresja pików muzycznych mp3 (layer 2, layer3)

- kompresja obrazów jpg

Technologia DCT(discrete cosine transform) dzieli obraz wideo na bloki po 64 punkty każdy, co tworzy blok 8 x 8.Każdy tak utworzony blok jest kompresowany indywidualnie. Otrzymujemy w ten sposób obraz ze skazą, która powstaje przy łączeniu tak skompresowanych bloków, a w rezultacie wysoką degradacje jakości wideo.



Efekt:

Oryginał

Kompresja silna upakowanie danych do poziomu około 25% *rozmiar: 4 070 b*

Kompresja bardzo silna upakowanie danych do poziomu około 5% *rozmiar: 1 741 b*

- filtracja obrazów

Oryginał

Obraz po wykonaniu odwrotnej transformaty Fouriera